INTRODUCCIÓN A LA ECONOMÍA

OBJETIVO.
Se pretende que el lector logre manejar los instrumentos matemáticos básicos de aplicación en el estudio de la ciencia económica.

TEMAS
Ecuaciones e identidades. Funciones. Variables dependientes e independientes. Ejes de coordenadas cartesianas. Ecuaciones, tablas y gráficos.

"La matemática es un lenguaje", J. Willard Gibbs.
(Citado por Paul A. Samuelson en Fundamentos del Análisis Económico)

"La matemática es verdadera", René Descartes.

La matemática es a menudo considerada como la ciencia del sentido común; pero la realidad es que lo sobrepasa, y permite ir más allá de la imaginación y de la intuición.

La relación entre la ciencia económica y la matemática es íntima, ya que aquella se sirve permanentemente de la medición para realizar sus análisis y pronósticos. Al alumno le resultará evidente la utilización del álgebra, la geometría, el análisis matemático, el cálculo diferencial y la estadística que se emplean en los estudios econométricos.

La matemática es una ciencia exacta ligada estrechamente a la historia del hombre, y en la economía constituye una herramienta poderosa absolutamente necesaria por las ventajas que ofrece de poder analizar relaciones muy complejas con alto grado de precisión y facilidad.

En principio, los métodos del análisis teórico de la ciencia económica pueden plantearse a partir de argumentos verbales, técnicas geométricas ó desarrollos matemáticos (claro está que la geometría es una rama de las matemáticas). Preguntar cuál método es el mejor es lo mismo que preguntar si una máquina de afeitar es mejor que un cuchillo de monte: la respuesta depende de lo que buscamos hacer y de la capacidad de la persona que lo utilice. Es decir, si bien los métodos son intercambiables, es innegable la "potencia" del razonamiento geométrico y matemático. Gran parte de la teoría económica elemental (tanto la microeconomía como la macroeconomía) se basa en supuestos de relaciones sencillas entre dos ó tres variables, razón por la cual los libros introductorios desarrollan análisis verbales ó utilizan el lenguaje gráfico. Pero a niveles teóricos intermedios y superiores, las relaciones devienen más complejas utilizándose casi exclusivamente el análisis matemático.

No sólo es difícil, sino imposible aprender matemática de memoria, aunque puede resultar muy útil recordar las tablas aritméticas, la regla de los signos, los pasajes de términos, etc. Para introducirse en el lenguaje matemático básico requerido, todo estudiante debería invertir el tiempo necesario, con la seguridad de que tal inversión le reportará, más adelante, sustanciosos dividendos.

Con las matemáticas no existen términos medios: se la odia ó se la ama. Si es cierto que del amor al odio hay un solo paso, también lo será que ese camino puede recorrerse en el sentido contrario.

Ecuaciones e identidades

Las igualdades (dos miembros separados por el signo =) pueden considerarse de dos clases:

1. Las **identidades**, que son igualdades que se cumplen dado *cualquier valor que asuman las variables.* Por ejemplo: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$, ya que puede observarse que para cualquier valor que se asigne a las variables **a** y **b**, la igualdad habrá de cumplirse.
2. Las **ecuaciones**, que son igualdades condicionadas, puesto que sólo se cumplen para *determinados pares de valores asumidos por las variables*. Cuando se encuentran estos pares de valores se dice que **se satisface** la ecuación. Por ejemplo: $4\,x + y = 8$, ya que si **x** vale 1, **y** sólo podrá valer 4, so pena de que la igualdad no se cumpla. Así, el par de valores $x = 1$ e $y = 4$, satisface la ecuación. ¿Podría indicar otros pares de valores que satisfagan la ecuación?

Concepto de función

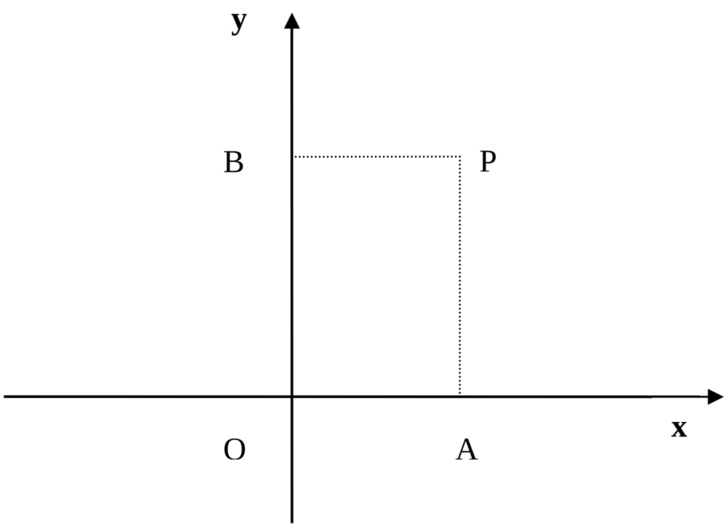
Se explicita una relación de funcionalidad cuando se dice que **una variable está en función de otra**, es decir cuando sus valores dependen de los que tome esta última. A la primera variable se la denomina dependiente, y a la segunda independiente.

Así, si se tienen dos variables x e y, se dice que *y es función de x* cuando los valores de y dependen de los de x. La variable **y es la variable dependiente**, mientras que **x es la variable independiente**. Su notación es, $y = f(x)$.

Las funciones se pueden graficar en un sistema de ejes cartesianos, en los que ambas variables podrán tomar valores positivos ó negativos.

Ya los pensadores griegos en los comienzos describían una geometría práctica -cultivada y desarrollada por estética- como una disciplina lógica y como un estudio de las formas, es decir una manifestación del esfuerzo por lograr el ideal de belleza. Pero la geometría analítica -idea portentosa inventada por René Descartes- permitió “retratar” una ecuación a partir de un par de coordenadas (x , y) en el plano. Podría decirse que en nuestra formación media somos (ó debiéramos ser) *aristotélicos*, pero en la educación superior terminamos siendo todos *cartesianos*.

Esta geometría con coordenadas resulta fácil de comprender. Considérense dos rectas (ejes) en un plano, trazadas de modo que se corten formando ángulos rectos en un punto O (origen de coordenadas). Llamando **y** al eje vertical (**ordenada**), designando como **x** al eje horizontal (**abscisa**), cualquier punto (**P**) en todo el plano puede identificarse de una manera única por su distancia perpendicular a ambos ejes.



Por ejemplo, el punto P por las distancias OA y OB. Estas distancias constituyen las coordenadas del punto en cuestión.

Todas las distancias horizontales a la derecha de O son consideradas positivas y a la izquierda negativas. Análogamente, las distancias verticales por encima de O son positivas, y por debajo negativas.

Veamos un ejemplo. Supongamos que una persona necesita alquilar un automóvil (que podría llegar a no usar), debiendo para ello pagar 100 $ fijos y 20 $ por día de utilización del vehículo. El costo total del alquiler está formado por una *suma fija*, más una cantidad que *variará* según los *días* que se contrate el auto.

Por lo tanto, el costo estará *en función* de los días de utilización, dependiendo de ellos. Esta relación se podría expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{C = 100 + 20\,t}$$

siendo C : costo total (que se expresa en pesos)

t : tiempo (expresado en días)

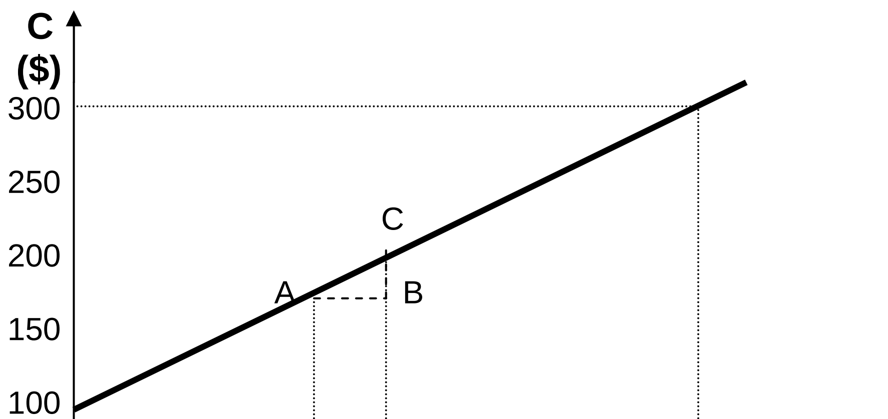
Existen en esta ecuación dos valores, llamados **parámetros**, y que son los que corresponde a la cantidad de 100 que se debe pagar sin tener en cuenta el tiempo, y 20 que se debe pagar por cada día de uso. Estos parámetros **están dados**, y son conocidos al momento de establecer la relación.

En cambio no se sabe cuántos días decidirá la persona utilizar el auto. Existirán diferentes costos totales según el tiempo de uso del vehículo: dada una determinada cantidad de días variará el valor correspondiente al costo. De manera que **C** es la **variable dependiente** y **t** es la **variable independiente**.

Se puede construir la siguiente tabla, en la que dando valores alternativos a la variable tiempo, se calcule el valor de la variable costo:

t (en días)	**C** (en pesos)
0	100
1	120
2	140
3	160
4	180
5	200
6	220
7	240
8	260
9	280
10	300

Trasladando los valores de la tabla a un gráfico de coordenadas cartesianas, midiendo el costo en la ordenada y el tiempo en la abscisa, quedará representada una línea recta:



La ecuación, la tabla y el gráfico están brindando la misma información. Se puede observar que el valor de la ordenada correspondiente al origen de coordenadas es 100, constituyendo éste el **parámetro de posición** (también llamado constante ó término independiente).

Otra cosa que distingue a esta recta es la **pendiente**, es decir ***el cambio en la variable dependiente en respuesta a una modificación en la variable independiente***. Así por ejemplo, cuando se pasa de 4 a 5 días (marcado en el gráfico por el segmento AB) el costo se eleva de 180 a 200 $ (reflejado por el segmento BC).

Es decir, BC dividido AB es igual a 20, que es el parámetro que vincula funcionalmente al tiempo con el costo en la ecuación original. En términos trigonométricos, dividir BC sobre AB es calcular la tangente del ángulo correspondiente al punto A (tangente = cateto opuesto / cateto adyacente).

En resumen, la ecuación de la recta utilizada en el caso planteado es del tipo general **y = a + b x** , siendo **y** : la variable dependiente; **x** : la variable independiente; **a** : el parámetro de posición y **b** : la pendiente.

Gráficamente, la variación sufrida por **y** como consecuencia de una variación en **x** denota un traslado a lo largo de la recta (por ejemplo, de A a C). En cambio una modificación en los parámetros producirá una modificación de la recta:

1. Una modificación en el **parámetro de posición** produce un **desplazamiento** de la recta.
2. Una modificación en la **pendiente** produce una **rotación** de la recta.

Tarea:

a) Arme la ecuación, la tabla y el gráfico si el costo fijo aumenta a 150 $.

b) Ídem, pero suponiendo que lo que cambia es el costo diario a 25 $.

c) Ídem, si ambos cambios se producen simultáneamente.

d) Esté seguro de poder distinguir entre una rotación y un desplazamiento.

Ejercitación elemental

1) Explique brevemente los siguientes conceptos, ejemplificando en cada caso:

a) Igualdades: identidades y ecuaciones.

b) Función: explícita e implícita.

c) Parámetros.

d) Variables: discretas y continuas, dependientes e independientes.

e) Pendiente: significado, interpretación geométrica.

f) Función lineal: forma general, componentes, gráfico, casos especiales (función identidad y función constante).

2) Dadas las siguientes funciones implícitas transformarlas en explícitas:

a) $16x - 4y + 18 = 0$

b) $3y + 15 + 15x = 0$

c) $120 - 5y - 10x = 0$

3) Tabule y grafique las siguientes funciones lineales, indicando si son crecientes ó no:

a) $y = 2 + 2x$ b) $y = 3x + 4$

c) $y = 4 - 2x$ d) $y = 4x$

4) Invierta la relación de dependencia entre las variables de las funciones del ejercicio anterior, tabule y grafique. ¿Qué resultados observa ?

5) Determine el, o los valores de la variable x :

a) $3x + 5 = 15 - 2x$

b) $\frac{5}{2}(x + \frac{2}{5}x) - 1 = x$

c) $2x(5 - 3x) = 4(2x - 2)$

d) $4x^2 + 40 = 8(x + 5)$

6) Efectúe la suma de las siguientes funciones y grafique:

a) $y = 10 - 4x$
$y = 10 - x$

b) $x = 2,5 - 0,25y$
$x = -y + 10$

7) Resuelva analítica y gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones, ensayando distintos métodos de resolución:

a) $y = 10 - 2x$
$y = 10 + 4x$

b) 2 y + 14 x – 30 = 0
4 y – 12 x – 20 = 0

c) $2x - 3y = -4$
$3x + \frac{1}{2}y = 4$

d) y = 15 – 7 x
y = 3 x + 5

e) 5 x + 3 y = 2
- 5 x + 6 y = 4

f) 3 x + 7 y = 15
x - y = - 5

8) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x;y)$ dados. Grafique.

a) $p_1(2;6)$
$p_2(5;0)$

b) $p_1(0;15)$
$p_2(10;5)$

9) Dada la siguiente función: 10 y + 20 x – 100 = 0

a) Indique el valor de la pendiente y de la ordenada correspondiente al origen.

b) Encuentre una paralela y una perpendicular a la función. Grafique.

Algunas amenidades

1) Para alquilar un automóvil visitamos dos empresas. En una de ellas el costo es de 65 $ por día. La otra en cambio no cobra por día, sino 3,25 $ por kilómetro recorrido. En ambos casos el combustible corre por cuenta del cliente.
   a) ¿De qué variable es función el costo en cada caso?
   b) Realice un gráfico para cada situación.
   c) Si necesitamos un auto por 3 días para recorrer 20 km por día, ¿qué empresa nos conviene?
   d) ¿Cuál sería la empresa que nos conviene para recorrer 60 km en un solo día?
   e) ¿Cuál conviene si alquilamos el auto por 2 días para recorrer 13 km diarios?

2) Ahora queremos alquilar una moto por un día. Una empresa cobra un arancel de 20 $ por día, más un recargo por distancia de 2 $ por cada 10 km. Otra empresa cobra directamente 35 $ por día con kilometraje ilimitado. ¿En qué casos conviene cada empresa?

3) Los taxis de una ciudad tienen la siguiente tarifa:
   - Bajada de bandera (costo fijo para todos los pasajeros) : 3,20 $
   - Cada ficha (que cae cada 200 metros) : 0,60 $

   a) Realice un gráfico del costo del viaje en función de la distancia recorrida.
   b) ¿Cuál es el costo de un viaje de 550 metros?
   c) ¿A los 2 km pagaremos el doble que a los 1000 metros?

4) En un local bailable se anuncia: “Canilla libre: Las copas que desee por 30 $!” En otro lugar cada copa tiene un precio de 6 $.
   a) Represente en un mismo gráfico las “ofertas” de ambos locales.
   b) ¿En qué casos conviene cada lugar?
   c) ¿Cuál es la consumición en la cuál se paga lo mismo en cada lugar?
   d) Usted, ¿cuál elegiría?

5) Dos amigos cazadores, después de armar su tienda de campaña, se pusieron en marcha para cazar osos. Caminaron 10 kilómetros hacia el Sur y luego 10 kilómetros hacia el Este, divisando un oso. Lo cazaron y volvieron al campamento,

descubriendo que en total habían recorrido 30 kilómetros. ¿De qué color era el oso? (ante la duda, acuda a su profesor de Geografía)

6) Una señora bastante distraída necesita recordar el número de su DNI. Sabe las 6 primeras cifras y de las dos últimas sólo recuerda que una de ellas es un 8. Su amiga, que tiene las mismas 6 primeras cifras, le comenta que el DNI de ella termina en 48. ¿Cuántos números diferentes puede armar la señora distraída para encontrar su DNI?

7) Un viajero tiene que cruzar un río con los únicos bienes que posee: un lobo, una cabra y un repollo. El único bote disponible es muy pequeño y no puede llevar más que al viajero y *uno* de sus bienes. Desgraciadamente, si los deja juntos la cabra se comerá el repollo y el lobo devorará a la cabra. ¿Cómo transportará el viajero sus pertenencias a la otra orilla del río, manteniéndolas intactas?

8) Una empresa de micros calculó que la ganancia lograda en un viaje es igual a
$G = 510 – 18\,x$, siendo x la cantidad de asientos vacíos.
   a) ¿Cuál es la ganancia máxima en un viaje?
   b) ¿Cuál es el número mínimo de asientos vacíos a partir del cual hay pérdidas?

9) Un padre tiene cuatro veces la edad de su hijo. Dentro de 20 años solamente tendrá el doble de edad de su vástago. Determinar las edades actuales de los dos.

10) Un padre tiene tres veces la edad de su hijo. Dentro de 10 años, el hijo tendrá el doble de la edad de su padre. ¿Qué edad tienen ambos ahora?

11) Hace unos días al pasar por un comercio céntrico observé en la vidriera una oferta de abrelatas eléctrico (con sacacorchos incluido) importado de China, a un precio de lista de 100 \$. Por ser el último disponible y abonarlo al contado logré un descuento del 20 %. Al llegar a mi casa me encontré con un pariente (al que le gusta el vino) quién me convenció de que se lo vendiera ofreciéndome una cuarta parte más de lo que yo había desembolsado.
   a) ¿Cuál fue el último precio pagado por el abrelatas?
   b) En términos porcentuales, ¿cuál fue mi ganancia?
   c) ¿Cuál fue mi ganancia en tanto por uno?

“Las leyes de la naturaleza están escritas en el lenguaje de las matemáticas, como ya comprendieron los antiguos. Las leyes de la sociedad se describen en el mismo lenguaje; esto es lo que deberán comprender los modernos”, Oskar Morgenstern.